

Dışbükeylik ve Optimizasyon: Ders Notları

Mustafa Çelebi Pınar¹

Eylül 2020

¹Mühendislik Fakültesi, Bilkent Üniversitesi

Ertan Pınar (1935-1978) ve Münire Pınar (R. 1325-1976) için..

Önsöz

Elinizdeki kitap bir önceki ders kitabımın ([38]: Doğrusal Optimizasyon'dan Çıkış: Ders Notları, Seçkin, Ankara, 2020) devamı niteliğindedir. Söz konusu kitapta Doğrusal Optimizasyon problemleri konu edilmişti. Bu kitapta doğrusal olmayabilen ancak dışbükeylik (İngilizce convexity) adı verilen bir özelliğe sahip problemler sonlu boyutlu uzaylarda ele alındı. Dışbükey analiz (convex analysis) 1950'li yıllardan bu yana müstakil bir analiz alt konusu olarak geliştiği halde bildiğim kadarıyla konu üzerine Türkçe bir kitap mevcut değil. Tabii dışbükeylik ve optimizasyon ilişkisine yer veren bazı Türkçe kaynaklar mevcuttur; örneğin, benim bulabildiklerim [4, 17, 35] numaralı kaynaklardır. Ancak söz konusu kitaplar başka birçok konu yanında dışbükeyliğe de değinirler. Yine belirtmeliyim ki benim yukarıda sayılan kitaplara üstünlük iddiasında olmam söz konusu olamaz. Ancak yardımcı kaynak olabilirim.

Öte yandan bu kitap da bir dışbükey analiz kitabı olmak iddiasında değildir. O tarz bir kitabı matematikçilerin yazması daha uygun olur. Ben mütevazı biçimde daha ziyade dışbükeyliğin optimizasyonda kullanımına ışık tutmayı hedefledim. O bakımdan kanımca mühendislik ve iktisat öğrencileri de kitaptan faydalanabilirler. Kitap esas olarak matematik kitabı olmakla birlikte kuvveti azaltılmış aşu mikrobi gibidir. Okuru hasta etmeden konuya aşına ve hatta (ümit ediyorum ki) müptela kılacak ve ayrıca okunması daha çok çaba gerektiren ileri düzey kitaplara karşı direnç geliştirmesini sağlayacaktır (tabii, dirençten kastımız ileri kitaplardan ürkmeden, onları da okuyabilme yetisidir). Kitap, mühendislik, iktisat ve matematik dallarında son sınıf ve lisansüstü öğrencilerin başvurabileceği bir Türkçe kaynaktır. Kitabı kendi başına takip etmek isteyen okurun biraz doğrusal cebir ve biraz matematiksel analiz (calculus) bilmesi gerekir.

Dışbükeyliği önemli kılan iki husus mevcuttur: birincisi her yerel minimum noktası dışbükey fonksiyonlar için bir global (kapsamlı) minimum noktasıdır; ikinci özellik de birçok dışbükey problem için yakınsama hızı hesaplanabilen ve problemin büyüklüğünün bir polinom fonksiyonu olan algoritmaların biliniyor olmasıdır. Son cümlede bahsi geçen yöntemler son 25 yılın gelişmeleridir. Doğrusal optimizasyonun başlangıcı en az 1940'lar sonuna kadar gider, ancak 1980'li yıllara kadar doğrusal olmayan dışbükey problemler için sayısal yön-

temler bazı özel problem sınıfları dışında kısıtlı etkiye sahipti. 1990'lı yılların ortalarından itibaren bu görüntü değişmeye başladı. Bazı etki alanı daha geniş dışbükey problemler için hızlı yöntemler geliştirildi ve uygulamalar çeşitlendi. Bu kitap gelişmelerin en azından bir kısmını okura sunuyor. Öte yandan algoritmalar üzerine araştırma yapması gerekmeyen okur için esas hedef çözmeye çalıştığı problemi dışbükey bir yapıda oluşturmak (dışbükey fonksiyonun dışbükey küme üzerinde minimumunu ara!) ve mevcut yazılımları kullanmaktır. Kitabın asıl hedef kitlesi de söz konusu okurlardır. Bu noktada bir uyarı: her dışbükey problem kolaylıkla çözülür değildir: bkz. Bölüm 11.4 eksi olmayan polinomlar kümesi veya Ders 10 kopozitif matrisler konisi.

Bir önceki kitaptaki gibi her bölüm bir dersten oluşur. Dersler bazen iki saatlik ya da biraz daha uzun bir oturumda çalışılabilir. Daha uzun dersler iki haftaya bölünebilir ya da dersi veren kişi bazı bölümleri dışarıda bırakmayı tercih edebilir. Ancak kitabın bir sömestirlik, mesela 45 saatlik, bir ders için yeterli malzemeyi kapsadığını umuyorum. Önceki kitabıma kıyasla önemli bir fark mevcut: bu kez çözüm algoritmalarına değinmedim; sadece Disiplinli Dışbükey Programlama başlığı altında son yıllarda gelişen bir hesaplama akımına yer verdim. Algoritmaları inceleyen bir başka kitap geleceğe bıraktığım bir proje oldu çünkü algoritmalar ister istemez dışbükey olmayan problemlere ve piyasada mevcut yazılımlara da önemli bir yer ayırmak zorunluluğu içeriyor.

Kitabı yazarken hem klasik (örneğin [3, 39]) hem de nispeten yeni kaynaklardan ([12, 14, 22]) yararlandım. Kitap yeni ve klasik kaynakların bir sentezi olarak görülebilir. Belirtmek isterim ki özgün bir araştırma eseri değil bir ders kitabıdır ama Türkçe kaynaklarda – bildiğim kadarıyla – yer almayan bazı konuları kapsamaması bakımından yeni kabul edilebilir. Daha ayrıntılı olarak, Ders 1 ile 5 arası kısımlar [12] ve [14]'dan ilgili bölümler kullanılarak ve kişisel tercihlerimin sonucu oluşan bir damıtmadır. Ders 6 ve Ders 7 için ise daha çok [3] ve [12]'den yararlandım. Ders 8 ve Ders 9 daha çok kaynak [14]'den yararlanarak oluşturuldu. Ders 10 için kaynaklar [1, 7, 19]'den yararlandım. Ders 11, kaynaklar [1, 12, 26]'den yararlanarak hazırlandı. Her dersin sonunda yararlandığım kaynakların ilgili kısımlarını ve okurun göz atabileceği başka kaynakları işaret ettim. Ayrıca, her dersin sonunda alıştırmalar okurun dikkatine sunulmuştur. Kitabı dikkatle okuyan, önerilerde bulunan ve bazı alıştırmaların çözümlerini hazırlayan IE513 dersi öğrencilerine minnettarım. Çözümleri talep eden okurlara çözümleri e-posta yoluyla ulaştıracam. Tabii ki tüm eksiklerin ve hataların sorumlusu

6

benim. Okurların beni hatalardan haberdar etmelerini rica ederim.
Kitap tüm öğrencilerime armağandır.

2020, Bilkent, Ankara

İçindekiler

| | |
|--|-----------|
| 1 Ders 1: Dışbükey Kümeler | 15 |
| 1.1 Açık ve Kapalı Kümeler | 15 |
| 1.2 Dışbükey Kümeler, İlgin Kümeler ve Koniler | 16 |
| 1.2.1 Örnekler | 18 |
| 1.3 Dışbükeyliği Koruyan Küme İşlemleri | 20 |
| 1.3.1 Kesişim | 20 |
| 1.3.2 İlgin Dönüşüm | 22 |
| 1.3.3 Perspektif ve Kesirli Doğrusal Dönüşümler | 24 |
| 1.4 Dışbükey Kümelerin Ayrılığı | 24 |
| 1.5 Dışbükey Kümelerin Kombinatoryal Özellikleri | 27 |
| 1.6 Alıştırmalar | 28 |
| 2 Ders 2: Dışbükey Fonksiyonlar | 31 |
| 2.1 Genel Tanımlar | 31 |
| 2.1.1 Genişletilmiş Değerli Fonksiyonlar | 32 |
| 2.1.2 Epigrafi ve Dilim Katı | 33 |
| 2.1.3 Dışbükeyliğin Farklı Nitelemeleri | 34 |
| 2.2 Dışbükeyliği Koruyan Fonksiyon İşlemleri | 40 |
| 2.2.1 Pozitif Ağırlıklı Toplam | 40 |
| 2.2.2 Noktasal Maksimum ve Supremum | 41 |
| 2.2.3 Kısmi Minimizasyon | 45 |
| 2.2.4 Bileşim Sonucu Oluşan Fonksiyonlar | 46 |
| 2.3 Jensen Eşitsizliği | 47 |
| 2.4 Alıştırmalar | 49 |
| 3 Ders 3: Dışbükey Problemler | 53 |
| 3.1 Dışbükey Problem Tanımı | 53 |
| 3.2 Yerel ve Kapsamlı Optimal Noktalar | 56 |
| 3.3 Minimum Noktaların Varlığı Meselesi | 57 |
| 3.3.1 Minimum Noktaların Tekliği Meselesi | 58 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 3.4 | Problem Dönüşümleri | 58 |
| 3.4.1 | Monoton Amaç Fonksiyonu ve/veya Kısıt Dönüşümü | 59 |
| 3.4.2 | Değişken Değiştirme | 60 |
| 3.4.3 | Gevşeklik Değişkenleri Ekleme | 61 |
| 3.4.4 | Eşitlik Kısıtlarını Eşitsizliğe Çevirme | 63 |
| 3.4.5 | Aktif Olmayan Kısıtların Problemden Çıkarılması | 64 |
| 3.5 | Özel Dışbükey Problem Tipleri | 65 |
| 3.5.1 | Doğrusal ve Karesel Optimizasyon | 65 |
| 3.5.2 | Geometrik Optimizasyon Problemleri | 66 |
| 3.5.3 | İkinci Derece Koni Optimizasyonu | 66 |
| 3.5.4 | Yarı Belirli Optimizasyon | 66 |
| 3.6 | Alıştırmalar | 67 |
| 4 | Ders 4: Optimallik Koşulları | 69 |
| 4.1 | Kısıtlar Altında Optimallik | 69 |
| 4.1.1 | Kısıtsız Problemler | 70 |
| 4.1.2 | Yalnız Eşitlik Kısıtları | 71 |
| 4.1.3 | Yalnız Eksi Olmayan Bölge Kısıtları | 72 |
| 4.1.4 | Matris Değişkenleri | 74 |
| 4.2 | Türevsiz Durumlar | 76 |
| 4.2.1 | Alt Gradyan Hesabı | 77 |
| 4.2.2 | Türevli Olmayan Fonksiyonlar için Optimallik Koşulları | 81 |
| 4.3 | Alıştırmalar | 81 |
| 5 | Ders 5: Lagrange ve Eşterslik | 85 |
| 5.1 | Eşterslik Tanımları | 85 |
| 5.1.1 | Eşters Fonksiyon | 86 |
| 5.1.2 | Örnekler | 87 |
| 5.2 | Lagrange Usulü Eşters Problem | 89 |
| 5.3 | Zayıf ve Güçlü Eşterslik | 92 |
| 5.3.1 | Güçlü Eştersliğin Sağlaması | 93 |
| 5.3.2 | Örnekler | 96 |
| 5.4 | Karush-Kuhn-Tucker Koşulları | 99 |
| 5.5 | Max-Min Eşitsizliği ve Eyer Noktaları | 102 |
| 5.6 | Saklı Dışbükeylik | 105 |
| 5.6.1 | Doğrusal Ayraç ve Sınıflandırma | 109 |
| 5.7 | Alıştırmalar | 112 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 6 | Ders 6: Fenchel ve Eşterslik | 117 |
| 6.1 | Fenchel Eşleniği | 117 |
| 6.1.1 | Fenchel Eşleniğinin Özellikleri | 123 |
| 6.2 | Fenchel Eşleniği ile Lagrange Eştersi | 124 |
| 6.3 | Fenchel Usulü Eşters Problemler | 127 |
| 6.4 | Fenchel ve Lagrange Eşterslikleri | 132 |
| 6.4.1 | Konik Eşterslik | 137 |
| 6.5 | Büyük Sapmalar ve Fenchel Eşleniği | 138 |
| 6.6 | Alıştırmalar | 141 |
| 7 | Ders 7: Genelleştirilmiş Dışbükeylik | 145 |
| 7.1 | Yarı-Dışbükey Fonksiyonlar | 145 |
| 7.2 | Bazı Yarı-Dışbükeylik Özellikleri | 147 |
| 7.3 | Türevli Yarı-Dışbükey Fonksiyonlar | 149 |
| 7.4 | Yarı-Dışbükeyliği Koruyan İşlemler | 150 |
| 7.5 | Sözde Dışbükeylik | 152 |
| 7.6 | Log-Dışbükeylik ve Log-İçbükeylik | 153 |
| 7.6.1 | Log-Dışbükeylik ve Log-İçbükeyliğin Bazı Özel- likleri | 155 |
| 7.7 | Alıştırmalar | 156 |
| 8 | Ders 8: İkinci Derece Koni | 159 |
| 8.1 | İkinci Derece Koni Problemleri | 159 |
| 8.1.1 | İDEK Olarak İfade Edilebilen Dışbükey Kümeler | 161 |
| 8.2 | İDEK Optimizasyonu | 164 |
| 8.3 | İDEK Eştersliği | 169 |
| 8.4 | Seçilmiş İDEKOP Uygulama Alanları | 172 |
| 8.4.1 | Elipslerin Ayrılması | 172 |
| 8.4.2 | En Küçük Yüzey Alanı Problemleri | 174 |
| 8.4.3 | Tümel Değişim Bazlı İmge Onarımı | 175 |
| 8.4.4 | Kararlı Doğrusal Optimizasyon | 176 |
| 8.4.5 | Kararlı En Küçük Kareler Problemi | 177 |
| 8.5 | Alıştırmalar | 179 |
| 9 | Ders 9: Pozitif Yarı Belirli Koni | 183 |
| 9.1 | Doğrusal Matris Eşitsizlikleri | 183 |
| 9.2 | DME Dönüşümleri | 185 |
| 9.2.1 | Birden Çok DME | 185 |
| 9.2.2 | Schur Tümleri ve Öbek Matrisler | 185 |
| 9.2.3 | Eşleşim Dönüşümü | 187 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 9.2.4 | Finsler Önsavı ve Değişken Atma | 187 |
| 9.2.5 | DME için Kararlılık Önsavı | 188 |
| 9.2.6 | Karesel ve İDEK Eşitsizliklerinin DME Denkliği | 189 |
| 9.3 | Pozitif Yarı Belirli Optimizasyon | 190 |
| 9.3.1 | PYBOP Eştersliği | 190 |
| 9.4 | Dışbükey Olmayan Karesel Optimizasyon ve PYBOP | 194 |
| 9.5 | Bazı Matris Problemleri | 198 |
| 9.5.1 | Özdeğerler | 198 |
| 9.5.2 | Spektral Düzge Minimizasyonu | 200 |
| 9.5.3 | Matris Koşul Katsayısı Minimizasyonu | 201 |
| 9.5.4 | Frobenius Düzgesi Minimizasyonu | 204 |
| 9.5.5 | En Yakın İlinti Matrisi | 205 |
| 9.6 | Geometrik Problemler | 206 |
| 9.6.1 | Bir Çokgentop İçindeki En Büyük Elips | 206 |
| 9.6.2 | Bir Çokgentopu İçinde Taşıyan En Küçük Elips | 208 |
| 9.7 | Dinamik Sistemlerin Kararlılığı | 211 |
| 9.8 | Olasılık Kuramında Moment Problemleri | 213 |
| 9.9 | Alıştırmalar | 215 |
| 10 | Ders 10: PYBOP ve Kombinatoriyal Problemler | 219 |
| 10.1 | En Büyük Kararlı Küme Problemi | 219 |
| 10.2 | En Büyük Kesi Problemi | 222 |
| 10.3 | En Büyük İkiye Bölme Problemi | 225 |
| 10.4 | Karesel Amaç Fonksiyonu ve İkili Değişkenler | 227 |
| 10.5 | Kopozitif Koni | 230 |
| 10.5.1 | Kopozitif Matrisler ve Kararlı Kümeler | 232 |
| 10.6 | Temel Bileşen Analizi ve PYBOP | 235 |
| 10.7 | Alıştırmalar | 239 |
| 11 | Ders 11: Dışbükey Seçenek Teoremleri | 243 |
| 11.1 | Zayıf Seçenek Sonuçları | 243 |
| 11.1.1 | Mutlak Eşitsizlikler | 245 |
| 11.2 | Kesin Seçenekler | 246 |
| 11.3 | S-Önsavı | 250 |
| 11.3.1 | Ara Önsavın İspatı | 253 |
| 11.3.2 | S-Önsavının Sağlaması | 254 |
| 11.3.3 | S-Önsavı ve Karesel Optimizasyon | 256 |
| 11.3.4 | S-Önsavının Düzenlilik Varsayımı | 258 |
| 11.4 | Eksi Olmayan Polinomlar | 259 |
| 11.5 | Alıştırmalar | 263 |

İÇİNDEKİLER

11

| | |
|--|------------|
| 12 Ders 12: Disiplinli Dışbükey Programlama | 267 |
| 12.1 CVX İle Tanışma | 268 |
| 12.2 CVX Kuralları ve Örnekler | 269 |
| 12.3 Alıştırmalar | 277 |